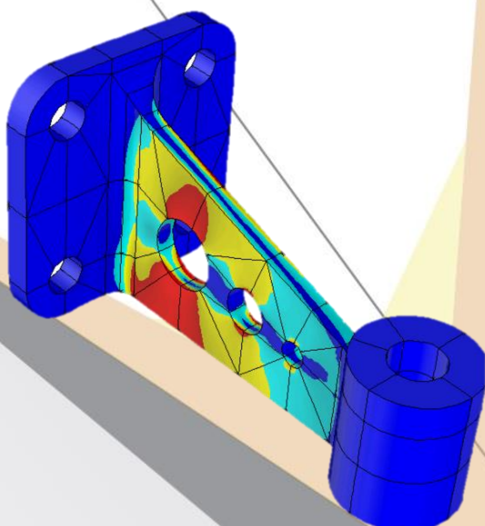
COMPLX

CURSO BÁSICO DE ELEMENTOS FINITOS

1.3 MATRIZ DE RIGIDEZ DEL ELEMENTO BARRA (1D)

Módulo MEF 1

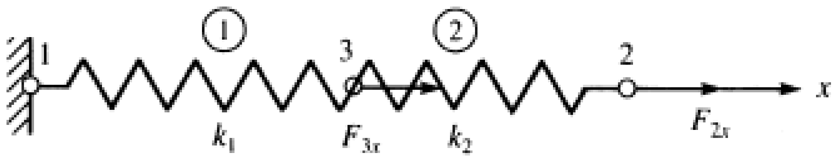


1. Introducción al Método de Elementos Finitos (MEF)
    a) Definición
    b) Historia
2. Conceptos básicos de álgebra lineal
    a) Sistemas de ecuaciones simultáneas y matrices
    b) Tipos especiales de matrices
    c) Operaciones con matrices
    d) Introducción a Scilab
3. **Matriz de rigidez del elemento barra (1D)**
    a) Definición del elemento barra
    b) Derivación de la matriz de rigidez
    c) Ensamble de la matriz de rigidez global
    d) Condiciones de Frontera homogéneas
    e) Solución
4. Análisis de estructuras reticulares utilizando barras bidimensionales

Ejemplo 4

Demuestre que **F=KU** del sistema mostrado es

$$\begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_1 & 0 & -k_1 \\ 0 & k_2 & -k_2 \\ -k_1 & -k_2 & k_1+k_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{Bmatrix}$$



F=kU de cada elemento

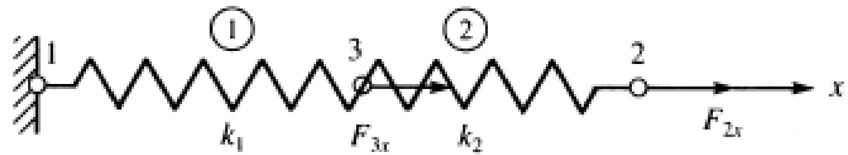
$$\begin{Bmatrix} F_1^{(1)} \\ F_3^{(1)} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k^{(1)} & -k^{(1)} \\ -k^{(1)} & k^{(1)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_3 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} F_3^{(1)} \\ F_2^{(1)} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k^{(2)} & -k^{(2)} \\ -k^{(2)} & k^{(2)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_3 \\ U_2 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} U_1 & U_2 & U_3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} \quad & \quad & \quad \\ & & \\ & & \end{bmatrix} \end{array} \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{Bmatrix}$$

Condiciones de Frontera Homogéneas

$$\begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_1 & 0 & -k_1 \\ 0 & k_2 & -k_2 \\ -k_1 & -k_2 & k_1 + k_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{Bmatrix}$$



Para el ejemplo anterior, U1=0 (condición homogénea), por lo que el sistema se puede reescribir de la siguiente forma:

$$k_1(0) + 0 - k_1(U_3) = F_1$$
$$(0) + k_2(U_2) - k_2(U_3) = F_2$$
$$-k_1(0) - k_2(U_2) + (k_1 + k_2)U_3 = F_3$$

Pero F1 es una reacción desconocida y F2, F3 son cargas aplicadas conocidas. A partir de lo anterior, decidimos trabajar con la segunda y tercera ecuación:

$$\begin{Bmatrix} F_2 \\ F_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_1 + k_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_2 \\ U_3 \end{Bmatrix}$$

Condiciones de Frontera Homogéneas

$$\begin{Bmatrix} F_2 \\ F_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_1 + k_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_2 \\ U_3 \end{Bmatrix}$$

Note que la última ecuación pudo haberse obtenido directamente al eliminar la primera fila y columna del sistema matricial original:

$$\begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_1 & 0 & -k_1 \\ 0 & k_2 & -k_2 \\ -k_1 & -k_2 & k_1 + k_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{Bmatrix}$$

En conclusión, <u>para condiciones de frontera homogéneas</u>, el sistema a ser resuelto puede ser obtenido directamente eliminando las filas y columnas correspondientes a los grados de libertad equivalentes a cero.

Lo anterior no significa que las fuerzas correspondientes a esos grados de libertad sean cero. Para este ejemplo:

$$-k_1(U_3) = F_1$$

Ejemplo 5:

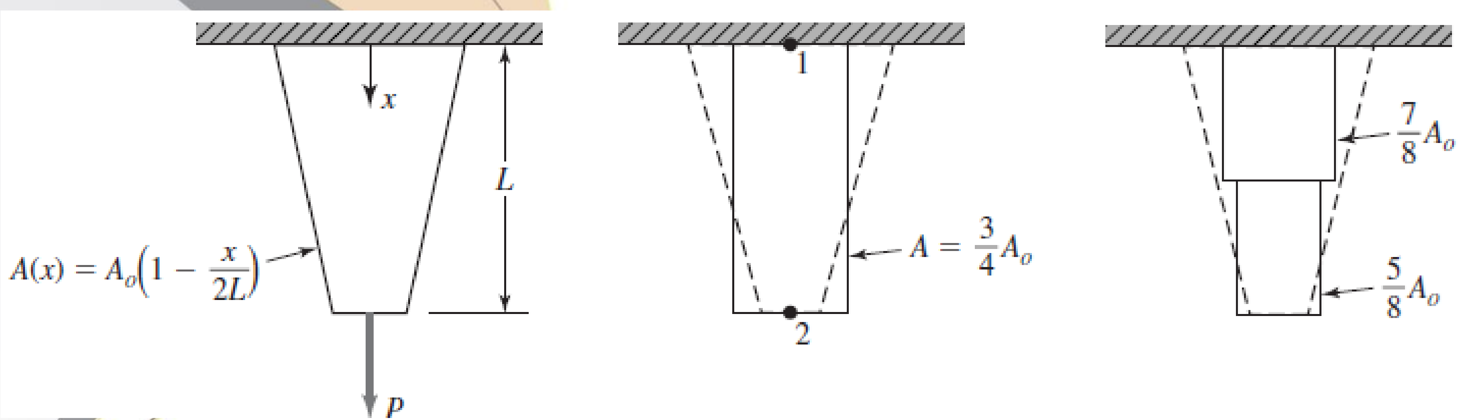
En la figura se muestra una barra elástica con sección transversal variable en la cual actúa una fuerza P= 100 N en un extremo, mientras que en el otro se encuentra fija. La longitud total de la barra L=200 mm. El área transversal varia linealmente de 50 a 25 mm^2.

Calcule el desplazamiento al final de la barra:

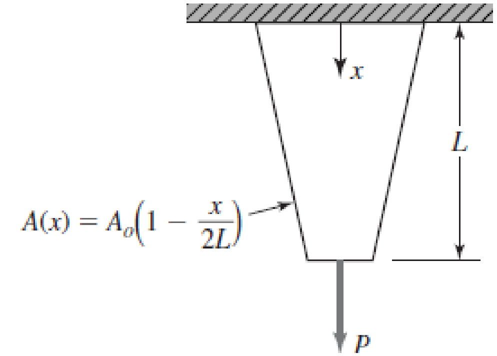
a) integrando para obtener la solución exacta.

b) modelándola como un elemento con área transversal igual al valor de A(L/2)

c) usando dos elementos con área transversal al valor del área a la mitad de los elementos



Ejemplo 5:



a) Para obtener la solución exacta tenemos que: $\sigma_x A = P$

$$A = A(x) = A_0\left(1 - \frac{x}{2L}\right)$$

La variación del esfuerzo axial a lo largo de la barra estará descrita como:

$$\sigma_x = \frac{P}{A_0\left(1 - \frac{x}{2L}\right)}$$

y la deformación unitaria axial:

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} = \frac{P}{EA_0\left(1 - \frac{x}{2L}\right)}$$

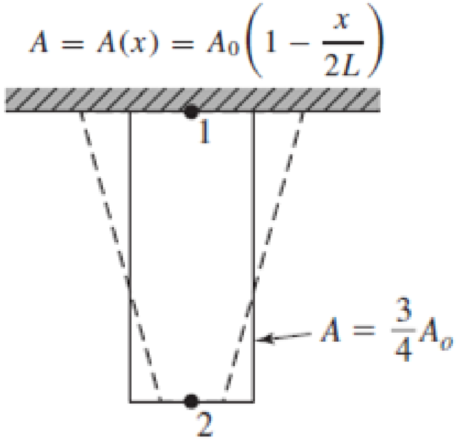
Integramos para encontrar el desplazamiento total:

$$\delta = \int_0^L \varepsilon_x \, dx = \frac{P}{EA_0}\int_0^L \frac{dx}{\left(1 - \frac{x}{2L}\right)}$$

$$= \frac{2PL}{EA_0}[-\ln(2L - x)]\Big|_0^L = \frac{2PL}{EA_0}[\ln(2L) - \ln L] = \frac{2PL}{EA_0}\ln 2 = 1.386\frac{PL}{A_0 E}$$

Ejemplo 5:

b) Para un solo elemento donde el área es igual a 3Ao/4 la constante de rigidez es igual a:



$$k = \frac{AE}{L} = \frac{3A_0E}{4L}$$

Las ecuaciones para el elemento son:

$$\frac{3A_0E}{4L}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ P \end{Bmatrix}$$

Aplicamos la condición de frontera U1=0 y encontramos que el desplazamiento para el nodo dos es:

$$U_2 = \frac{4PL}{3A_0E} = 1.333\,\frac{PL}{A_0E}$$

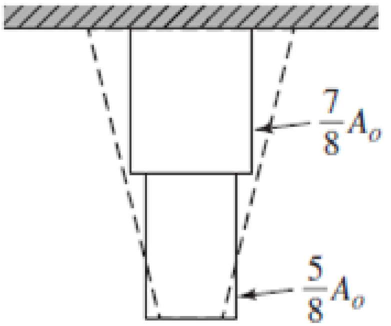
Ejemplo 5:

$$1.386\frac{PL}{A_0E} \qquad 1.333\frac{PL}{A_0E}$$

c) Para dos elementos de longitud L/2 la constante de rigidez para el primer elemento con área A1=7Ao/8 es:

$$A = A(x) = A_0\left(1 - \frac{x}{2L}\right)$$

$$k_1 = \frac{A_1E}{L_1} = \frac{7A_0E}{8(L/2)} = \frac{7A_0E}{4L}$$



Mientras que para el elemento dos con un área A2= 5Ao/8 constante es:

$$k_2 = \frac{A_2E}{L_2} = \frac{5A_0E}{8(L/2)} = \frac{5A_0E}{4L}$$

Debido a que no se ejerce ninguna fuerza al centro de la barra, nos queda el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{bmatrix} k_1 & -k_1 & 0 \\ -k_1 & k_1+k_2 & -k_2 \\ 0 & -k_2 & k_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ 0 \\ P \end{Bmatrix}$$

Ejemplo 5:

$$\begin{bmatrix} k_1 & -k_1 & 0 \\ -k_1 & k_1+k_2 & -k_2 \\ 0 & -k_2 & k_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ 0 \\ P \end{Bmatrix}$$

Aplicando la condición de frontera U1=0 podemos reducir a:

$$\begin{bmatrix} k_1+k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_2 \\ U_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ P \end{Bmatrix}$$

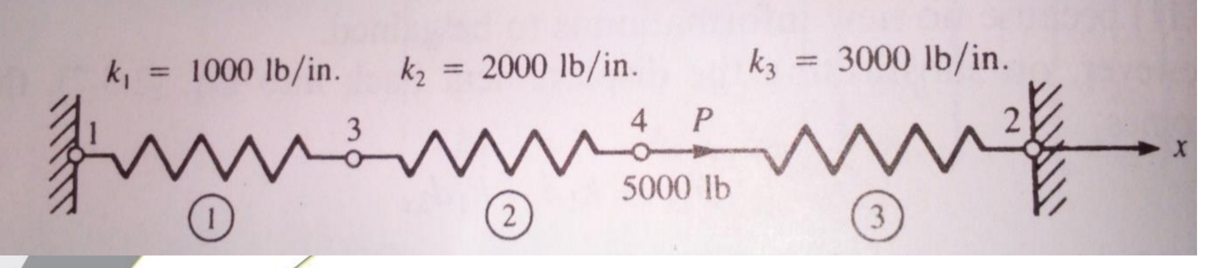
Despejando nos queda que:

$$U_2 = \frac{P}{k_1} = \frac{4PL}{7A_0E}$$

$$U_3 = \frac{k_1+k_2}{k_2}\,\frac{P}{k_1} = \frac{48PL}{35A_0E} = 1.371\frac{PL}{A_0E}$$

Ejercicio 2:

Para el ensamble de resortes con numeración arbitraria de nodos que se muestra, obtenga (a) la matriz de rigidez global, (b) el desplazamiento de los nodos 3 y 4, (c) las reacciones en los nodos 1 y 2, y (d) las fuerzas en cada resorte. Se aplica una fuerza de 5000 lb en el nodo 4; en dirección x. Los nodos 1 y 2 están fijos. Las rigideces de cada resorte se indican en la figura.



Referencias

Zienkiewicz, O., & Taylor, R. (2004). *El método de los elementos finitos.* Barcelona: CIMNE.

Carnegie Mellon Curriculum: introduction to CAD and CAE. (2014). Obtenido de Autodesk University: http://auworkshop.autodesk.com/library/carnegie-mellon-curriculum-introduction-cad-and-cae?language=en

Introduction to Finite Element Methods (ASEN 5007). (22 de Diciembre de 2014). Recuperado el 17 de Junio de 2015, de Department of Aerospace Engineering Sciences University of Colorado at Boulder: http://www.colorado.edu/engineering/cas/courses.d/IFEM.d/

Gallegos, S., (2006). Notas del Curso de Elementos Finitos. Monterrey. ITESM.